Методическая разработка учителя математики гимназии №22, города Майкопа, Чумаковой Марии Евгеньевны.

Тема: Метод интервалов. Метод замены множителей.

Алгоритм решения рациональных неравенств методом интервалов:

1. Привести неравенство к стандартному виду. Перенести все слагаемые в левую часть, разложить знаменатели на множители, привести к общему знаменателю. Преобразовав числитель, разложить его на множители линейные или квадратные с дискриминантом меньше нуля.

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+px+q)}{(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{\beta_m}(x^2+p_1x+q_1)} \vee 0$$

Стандартный вид заключается в том, что перед переменной в каждой скобке стоит знак плюс и все входящие квадратные трехчлены не имеют корней.

2. На числовую ось наносим нули числителя (закрашивая, если неравенство нестрогое и не закрашивая, если строгое) и нули знаменателя не закрашивая.
3. <u>В крайнем правом промежутке ставим знак «+».</u>

Если неравенство в стандартном виде, то подставляя любое число из крайнего правого промежутка, в каждой скобке, мы получим положительную разность.

4. При переходе через ноль числителя или знаменателя смотрим на степень скобки в которую входит этот ноль. Если степень *четная*, то знак *не меняем*. Если степень *нечетная*, то знак *меняем*.
5. В ответ записываем нужные промежутки, ориентируясь на расставленные знаки.

Пример 1. Решите неравенство.

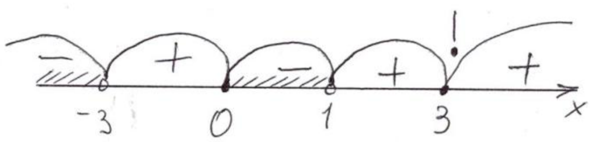
$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geq \frac{x}{4}.$$

Решение.

$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geq \frac{x}{4},$$

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2+2x-3} \geq 0,$$

$$\frac{x(x-3)^2}{(x+3)(x-1)} \leq 0.$$



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup [0; 1) \cup \{3\}$.

Пример 2. Решите неравенство.

$$\frac{(x^2-x-14)^2}{2x+21} \leq \frac{(2x^2+x-13)^2}{2x+21}.$$

Решение.

$$\frac{(x^2-x-14)^2}{2x+21} \le \frac{(2x^2+x-13)^2}{2x+21},$$

$$\frac{(x^2-x-14)^2}{2x+21} - \frac{(2x^2+x-13)^2}{2x+21} \le 0,$$

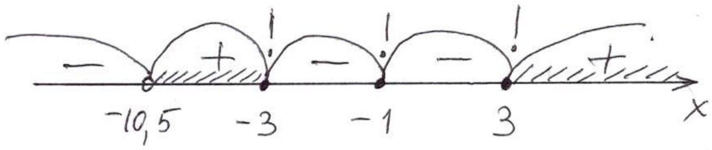
$$\frac{(x^2-x-14)^2-(2x^2+x-13)^2}{2x+21} \le 0,$$

$$\frac{(x^2-x-14-2x^2-x+13)(x^2-x-14+2x^2+x-13)}{2x+21} \le 0,$$

$$\frac{(-x^2-2x-1)(3x^2-27)}{2x+21} \le 0,$$

$$\frac{(x^2+2x+1)(x^2-9)}{2x+21} \ge 0,$$

$$\frac{(x+1)^2(x-3)(x+3)}{2x+21} \ge 0.$$



Ответ: $x \in (-10{,}5; -3] \cup [3; +\infty) \cup \{-1\}$.

II Метод рационализации.

Метод рационализации или метод замены множителей.

Рассмотрим неравенство: $(x^{99}-1)(x+1) < 0$.

Многочлен в первой скобке можно считать разностью значений функции $f(x)-f(1)$, где $f(t)=t^{99}$. Обратите внимание, что эта функция возрастающая.

Метод основан на определении возрастающей функции.

Определение. Функция называется возрастающей, если меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

$f(x) \uparrow \Leftrightarrow\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Таким образом, разность значений функций и разность значений аргумента, принимают один знак.

Вернемся, к примеру, получаем $(x^{99}-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$.

Пример 3. Решите неравенство.

$$(x^{115}+x^{47}-2)(x+3) > 0.$$

Решение.

Введем функцию $f(t)=t^{115}+t^{47}$. Так как функция возрастающая и $f(1)=2$, тогда

$$(x^{115}+x^{47}-2)(x+3) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) > 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

В примере мы заменили разность значений функций разностью значений аргументов, возможно и наоборот.

Рассмотрим разность модулей, их можно считать разностью положительных значений аргумента для функции $f(x)=x^2$. Так как для положительных значений функция возрастает, то мы можем воспользоваться предложенным свойством, в обратном порядке, это отражено в таблице.

Логарифмические и показательные функции при разных значениях оснований являются возрастающими или убывающими, поэтому при их рассмотрении появляется скобка $(a(x)-1)$ определяющая вид функции, в плане монотонности, это тоже отражено в таблице.

Воспользуемся этим свойством при решении смешанных неравенств. Определим заранее, что все замены происходят на ОДЗ.

Производимые эквивалентные замены оформим в виде таблицы.

Выражение	*Эквивалентная замена*
$\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert$	$f^2(x)-g^2(x)$
$\lvert f(x)\rvert$	$f^2(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$f^2(x)$
$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$	$f(x)-g(x)$
$a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}$	$(a(x)-1)(f(x)-g(x))$
$a(x)^{f(x)}-1$	$(a(x)-1)f(x)$
$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$	$(a(x)-1)(f(x)-g(x))$
$\log_{a(x)} f(x)$	$(a(x)-1)(f(x)-1)$

Пример 3. Решите неравенство.

$$\frac{(x-4)(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}{\log_2|x-2|}\le 0.$$

Решение.

$$\frac{(x-4)(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}{\log_2|x-2|}\le 0,$$

Учитывая ОДЗ, получаем:

$$\begin{cases}\frac{(x-4)(x+1-x-2)}{|x-2|-1}\le 0\\ x+1\ge 0,\\ x+2\ge 0,\\ |x-2|>0,\\ \log_2|x-2|\ne 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-4}{((x-2)^2-1)}\ge 0\\ x\ge -1,\\ x\ge -2,\\ x\ne 2,\\ |x-2|\ne 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-4}{(x-3)(x-1)}\ge 0,\\ x\ge -1,\\ x\ne 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(1;3)\cup[4;+\infty),\\ x\in[-1;+\infty),\\ x\ne 2,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(2;3)\cup[4;+\infty).$$

Пример 4. Решите неравенство.

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x}\le 0.$$

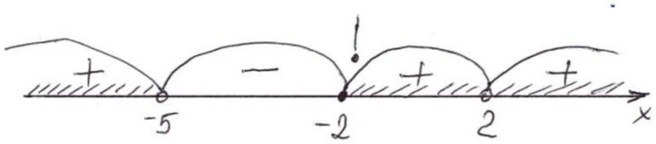
Решение.

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x}\le 0,$$

$$\frac{x^4-16}{2^{10-x^2}-2^{3x}}\le 0,$$

$$\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(2-1)(10-x^2-3x)}\le 0,$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x^2+3x-10} \geq 0,$$
$$\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+5)(x-2)} \geq 0,$$



Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup [-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенство:

1. $\frac{4x+9}{4x^2+3x-1} > \frac{2}{2x-3}$.
2. $\frac{(10-5x)^2}{(-1-3x)^4(2x-12)^2} \leq 0$.
3. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.
4. $\frac{x^2+3x-3}{x^2+3x} + \frac{11x-10}{x-1} \leq \frac{12x-1}{x}$.
5. $(x^{113}+x^{87}-2)(x+5) \geq 0$.
6. $\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leq 0$.
7. $(x^2-3x+1)^{8-x^2} \leq (x^2-3x+1)^{2x}$.
8. $\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1$.
9. $\log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left|\frac{x}{2}\right| \leq 0$.
10. $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.