Рукопись методической разработки

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………………. 2
ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ, АКТУАЛЬНЫЕ В ХОДЕ ИЗУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЕ………………………………………………………………. 3
1.1. Теория делимости. Делимость целых чисел. НОД и НОК. Их свойства 4
1.2. Признаки и свойства делимости……………………………………… 13
ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА ИНФОРМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ………………………………. 18
2.1. Исходный уровень знаний и умений, необходимый для решения задач……………………………………………………………………… 18
2.2. Методические приемы решения задач по информатике с использованием положений теории чисел………………………………….................. 20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………….. 39
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ………………………… 39

ВВЕДЕНИЕ

Реформы содержания школьных программ, которые непременно хранят определенное ядро с тем, без помощи которых обучающиеся не получат целого представления о математике и ее методах исходные темы при изучении других учебных дисциплин. К таким темам из раздела математики причисляются отдельные разделы теории чисел.

Теория делимости находится в числе важнейших разделов арифметического учения и, безусловно, всего учения о теории чисел. В школе теория делимости, как правило, используется во время изучения основных признаков делимости, ключевых понятий, и решения задач.

Объект исследования: процесс обучения информатике в профильной школе.

Предмет исследования: особенности использования элементов теории чисел в школьном курсе информатики.

Цель исследования: обоснование эффективности использования теории чисел в решении задач по информатике.

Цель исследования обусловила решение следующих **задач**:

- обобщение и систематизация теоретических и практических знаний по рассматриваемой теме
- подбор системы заданий по информатике, решаемых с использованием теории чисел
- обосновать эффективность использования элементов теории чисел при решении задач по программированию.

Для достижения этих целей были использованы следующие методы и приемы: методы системного и логического анализа, метод обобщения опыта, теоретический обзор и анализ методической литературы.

Теоретическое значение исследования заключается в том, что она раскрывает методологические особенности использования теории чисел для решения задач в области информатики.

Практическая значимость представленной исследования заключается в возможности использования исследовательских материалов в процессе изучения информатики и решения проблем информатики, а также для проведения междисциплинарной коммуникации.

ГЛАВА 1. Основы теории чисел школьного курсаматематики, актуальные в ходе изучения информатики в школе

В теории чисел центральную роль играет теория делимости, которая занимает значительную часть арифметики. В школьном курсе по математике студенты знают о невозможности деления на ноль и неопределенности деления целых чисел, что привело к следующим математическим понятиям: числа с двумя или более делителями, знаки делимости чисел, наибольший общий делитель, обозначаемый НОД, и наименьшее общее кратное, обозначаемое как НОК. Ученики, которые научились делиться в начальной школе, позже узнают о теории делителей на уроках математики в 5-м и 6-м классах и ее элементах в 7-9-м классах. Отсюда можно сделать вывод, что ведущее направление методов изучения натуральных чисел и операций над ними сопровождается последующим развитием в классах начальной школы, где теория делимости целых чисел была достаточно хорошо изучена в математике средней школы. Как правило, в теории чисел рассматриваются целые числа. Поэтому в данном контексте слово «число» подразумевает обычно целое число, а буквы a, b, c обозначают целые числа.

Если говорить об истории возникновения основных понятий теории делимости, необходимо отметить тот факт, что одно из основных и наиболее значимых преобразований математики, по данным современников, принадлежит Пифагору. Так, Прокл отмечал: «Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений». Сейчас весьма сложно отличить труды самого Пифагора от деятельности его учеников (пифагорейцев). Сфера их интересов охватывала множество наук, в том числе астрономию, музыку, геометрию и, конечно же, арифметику, а именно теорию чисел. Согласно имеющимся данным считается справедливым утверждение, что Пифагор и его школа с работами пифагорейцев, заложили основы арифметики и теории чисел, в частности.

Считается, что пифагорейцы в числе первых заинтересовались законами делимости чисел при изучении свойств чисел. Так, они систематизировали все числа по следующим категориям: нечетные и четные, составные и простые. Весьма занятным представляется подход пифагорейцев к визуализации различных категорий чисел. Так, например, простые числа пифагорейцы представляли в виде произведения двух сомножителей и определили их как «плоские» числа в виде прямоугольников. Составные числа последователи учений Пифагора принимали как произведение трех сомножителей с обозначением их как «телесных» чисел и представлением в виде параллелепипеда. Если говорить о простых числах, для представления которых произведения были невозможным, их обозначали как «линейные» числа.

В истории отмечена заслуга учеников пифагорейской школы, связанная с созданием учения о четных и нечетных числах. В современном мире, данное учение применяется как «теория делимости на 2». Эта теория отмечена в «Началах» – главном труде греческого математика Евклида (в 21-34-м предложениях IX книги).

1.1. Теория делимости. Делимость целых чисел. НОД и НОК. Их свойства

Давайте рассмотрим распределение теоретического и практического материала по рассматриваемой теме на уроке математики.

Изучение темы "делимость чисел" в пятом классе имеет положительные результаты. Это обусловлено тем фактом, что для этого курса основной целью является систематизация и обобщение тех знаний о натуральных числах, которые учащиеся получили в начальной школе. Амавина на самом деле не рассматривает элементы теории вычислений в программе пятого класса, но в качестве вводного курса есть подробное изучение расширенного набора натуральных чисел, включая ноль [9].

В курсе математики Г. Муравина, в следующем (шестом) классе изучаются основные элементы теории делимости:

- Делимость натуральных чисел.
- Делители и кратные;
- Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное;
- Свойства делимости произведения, суммы и разности;
- Признаки делимости и т.п

В этом курсе главной задачей считается «завершить изучение натуральных чисел и закрепить навыки вычисления с помощью обычных дробей» [9].

Так, ключевым способом на данном этапе изучения математики служит разбор вопросов, связанных со множественностью натуральных чисел. Как известно, основными понятиями являются такие понятия как «делитель» и «кратное», «наибольший общий делитель», а тук же «наименьшее общее кратное». Применение этих терминов связанно с уменьшением обычных дробей и приведением знаменателей к общему знаменателю. Необходимо отметить, также, разницу в свойстве делимости, количестве и количестве продуктов. Более того, на этом уровне подготовки еще не было дано подтверждения всем этим характеристикам. Признаки возможности разделить число получены из точных примеров. В то же время студенты делают простые выводы, доказывают свои действия и развивают навыки, связанные с определениями, правилами и признаками делимости. Применение делителей также актуально для понимания и корректного умножения чисел на множители для уменьшения дробей. Обучающиеся могут несколькими вариантами находить искомый наибольший общий делитель и искомое наименьшее общее кратное. Это способствует формированию у обучающихся вариационных представлений.

В программах 7-го класса такие элементы теории деления, как «целочисленное деление», «простые» и «составные» числа, «делители натуральных чисел» и их простые числа, как правило, даются на первых страницах учебника. Тема "один и тот же полином" также включает в себя элемент теории делимости, особенно если она делится на одно и то же. кроме того, существуют элементы теории деления, такие как размещение общего множителя в скобках и использование нескольких методов для умножения многочлена, в то время как предмет вычисления алгебраических дробей различается между наименьшим общим знаменателем и умножением, делением тех же алгебраических дробей.

В используемых в школе типовых учебниках по алгебре элементы теории делимости, рассматриваемые нами, изучаются только в начале первого четверти в ходе повторения темы «Алгебраические дроби. Арифметические операции с алгебраическими дробями». Затем промежуточные темы курса 8 класса поэтому же предмету касаются вопросов теории делимости. Здесь рассматриваются «квадрат трехчленов различными способами», «разложение многочленов на множители», «деление многочленов». По углубленной программе, при изучении математики в этом же классе (восьмом) становится возможным более детальное изучение элементов теории деления. Так, в зависимости от автора и особенностей используемого учебника, учебная программа по математике может включать темы о множествах натуральных, целых и вещественных чисел, каждое из которых содержит уникальное соответствие (биекции) между определенным набором различной сложности, свойств и критериев деления, а также менее распространенный метод определения узлов натурального числа (алгоритм Евклида).

В девятом классе изучение теории деления не представлено, но ее элементами являются многочлены (делители свободных многочленов, теорема Безу, распределение квадратных трехчленов, многочлены) и методы решения дробно-рациональных уравнений. Для дальнейшего изучения введем определения таких понятий как «наибольший общий делитель», «наименьшее общее кратное».

Определение: Под наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел a и b понимается такое наибольшее натуральное число, на которое делятся и a, и b.

НОД обладает следующим рядом свойств:

1. Наибольший общий делитель чисел x и y равен наибольшему общему делителю чисел y и x, то есть, НОД(x,y) = НОД(y,x).

Доказательство. Указанное свойство наибольшего общего делителя является прямым следствием определения НОД.

2. Если d делится на c, то множество общих делителей чисел d и c совпадает с множеством делителей числа c, в частности, НОД(d,c)=c.

Доказательство. Обозначенное свойство можно рассматривать в двух проекциях. В первом случае, любой из общих делителей чисел d и c является делителем указанных чисел d и c, не исключая число g. В другом ключе, так как $c = g$, то любой делитель числа b является делителем и числа c благодаря такому свойству транзитивности. Таким образом получается, что любой делитель числа g безусловно является общим делителем чисел d и g. Так, можно говорить о доказательстве, что если число d делится на число g, то в совокупности количество делителей чисел d и g совпадает с совокупностью делителей только одного числа g. Однако, стоит учитывать, что из-за того, что наибольшим делителем числа является само число b, то наибольший общий делитель чисел d и g также равен g, то есть, НОД$(d, g) = g$. Если говорить о конкретном примере: если числа d и g равны, то НОД(d, g) = НОД(d, d) = НОД$(g, g) = d = g$. Например, НОД$(78{,}78) = 78$

Подводя итоги вышеуказанному, доказанное свойство наибольшего делителя дает возможность определить НОД для двух чисел, когда становится возможным деление одного числа на другое. При таких условиях найденный наибольший общий делитель будет равен одному из указанных чисел, на которое делится второе число. Например, , так как 48 кратно шести.

3. Если $m = n \cdot q + r$, где m, n, r и q – целые числа, то множество общих делителей указанных чисел m и n совпадет с множеством общих делителей чисел n и r, в частности можно записать, НОД(m, n) = НОД(m, r).

Доказательство. По условию, приведенному в формулировке теоремы, равенство $m = n \cdot q + r$ предполагает, что общий делитель для чисел m и n будет иметь кроме этого свойство делить c. Это свойство является основной причиной для утверждения, что любой общий делитель чисел n и r будет делить m. Кроме того, стоит отметить, что из этого следует необходимое сходство наибольших из найденных общих делителей, то есть, говоря другими словами, справедливым выражением становится следующее равенство: НОД(m, n) = НОД(n, r).

4. Если m – любое натуральное число, то НОД$(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot$НОД$(a, b)$.

Доказательство. При произведении обеих сторон алгоритма Евклида на m, справедливым становится выражение НОД$(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot rk$, где rk –НОД(a,b). Следовательно: НОД$(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot$НОД$(a, b)$.

Указанное свойство является основополагающим для того, чтобы найти НОД, при котором применяется разложение на простые множители.

5. Если p – один из общих делителей чисел a и b, то НОД$(a{:}p, b{:}p) =$ НОД$(a, b){:}p$, при этом, если $p =$ НОД(a, b), то получаем НОД$(a{:}$НОД$(a, b), b{:}$НОД$(a, b)) = 1$, тогда числа $a{:}$НОД(a, b) и $b{:}$НОД(a, b) окажутся взаимно простыми.

Согласно Боревичу З.И., именно на данном доказанном свойстве НОД базируется способ, позволяющий приведение обыкновенных дробей к виду, не допускающему сокращение [2].

Теорема 13. НОК двух положительных чисел m и n равно произведению чисел m и n, деленному на наибольший общий делитель чисел m и n, что в обозначениях, НОК$(m, n) = m \cdot n/$НОД(m, n).

Доказательство. Допустим число M – одно из чисел кратное m и n. Следовательно, M делится на m. Согласно определению делимости чисел, найдется некоторое целое число k. Данное число такое, что справедливо равенство M $= m \cdot k$. Однако, из выражения в теореме следует, что M делится и на n и, в таком случае следует, что a·k делится на b. Для упрощения определим НОД(a,b) как d. Так, возникает возможность записать равенства $m = m1 \cdot d$ и $n = n1 \cdot d$, при этом в качестве следствия получится, что $m1 = m{:}d$ и $n1 = b{:}n$ будут представлять из себя числа взаимно простые. Исходя из указанного ранее, обозначенное условие «m·k делится на n», можно переформулировать как: «$m1 \cdot d \cdot k$ делится на $n1 \cdot d$», которое, в свою очередь, благодаря свойству делимости соответствует выведенному условию «m1·k делится на n1». Согласно свойству взаимно простых чисел, при условии что «m1·k делится на n1», и «a1не делится на m1» (так как m1и n1 - взаимно простые числа), то на m1 должно делиться k. В таком случае, возникает необходимость в существовании некоторого целого числа t, для которого будет справедливо равенство $k = n1 \cdot t,$ а так как $n1 = n: d,$то $k = m: d \cdot t.$ Подходя к завершению, если в равенство M $= m \cdot k$ в место k подставить его выражение вида $n: d \cdot t,$ естественным образом приходим к равенству M $= m \cdot n: d \cdot t.$ В результате указанных операций, равенство M $= m \cdot n: d \cdot t$ позволяет определить вид всех общих кратных чисел m и n. А если исходить из того, что m и n по условию являются положительными числами, то при $t = 1$, появляется возможность определить их положительное наименьшее общее кратное, которое, как видно из указанных выше операций, будет выглядеть как $m \cdot n: d.$ Так, справедливым становится равенство НОК$(m, n) = m \cdot n:$ НОД$(m, n).$ Доказанная связь между наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем двух данных чисел позволяет найти НОК, если известен НОД[2].

Из рассмотренной теоремы выходят два важных следствия:

1. Общие кратные двух чисел совпадают с кратными их наименьшеı об-щего кратного. Это действительно так, так как любое общее кратное] чисел m и n определяется равенством M = НОК(m,n)·t при некотором целс значении t.

2. Наименьшее общее кратное взаимно простых положительных чис(m и n равно их произведению. Обоснование этоо факта достаточно очевидно Так как m и n взаимно простые, то НОД(m,n) = 1, следовательно, НОК(m,n) m·n:НОД(m,n) = m·n:1 = m·n

Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

Согласно общепринятому определению: «Простое число – это натуральное число, имеющее только два делителя: 1 и само число. Составное число – натуральное число, имеющее натуральный делитель, отличный от него самого и 1».

Важно отметить, что уникальным в данном контексте является число 1, который, несмотря на то, что является важным для определения указанных категорий чисел, не относится ни к одной из них.

Основная теорема арифметики утверждает, что «любое целое число, которое больше единицы, можно разложить на простые множители». В формулировке и доказательстве указанной арифметической теоремы важное значение имею две другие вспомогательные теоремы.

Теорема 11. Любое целое положительное и отличное от 1 число t либо делится на простое число r, либо t и r взаимно простые числа.

Доказательство. Наибольший общий делитель чисел t и r делится на r. В случае, когда r представляет собой по условию простое число, то его положительными делителями могут выступать только 1 и r, а это значит, что НОД$(at\,r)$ может быть равен только либо 1, либо r. В том случае, если делителем является 1 – НОД$(t,r) = 1$. Из данного выражения следует, что числа t и r— взаимно простые. Когда же делителем выступает число r, НОД$(t,r) = r$. Обобщая данные и исходя из указанных условий можно сделать вывод, что если r делится на НОД(t, r), то t делится на r.

Теорема. Если произведение нескольких целых , отличных от 1, положительных множителей делится на число d (где d –простое число), то хотя бы один из множителей делится на d.

Доказательство. Используя положения предыдущей теоремы, делаем вывод, что каждый из множителей может быть взаимно простым с числом d или делиться на него. Используя свойства взаимной простоты чисел, можно утверждать, что произведение соответствующих множителей было бы взаимно просто с d в том случае, если бы все множители обладали таким же свойством по отношению к d, то есть были бы взаимно просты с d. Данная особенность характеризует возможность, что хотя бы один из множителей будет обладать свойством делиться на d.

Рассмотрим основную теорему арифметики.

Теорема 12. Произвольное целое число, большее 1, может быть разложено на произведение простых множителей, при этом разложение единственное, при том, что не учитывается порядок следования множителей.

Доказательство. Допустим переменная а по своим свойствам является целым числом, которая больше единицы.

В качестве первого шага к понимаю решения докажем, что число а можно разложить на простые множители. В связи с этим проведем операции, указанные далее.

Допустим, что $p1$ представляет из себя наименьший положительный и отличающийся от 1 делитель числа а. Доказанная ранее теорема позволяет утверждать, что число $p1$ является простым. Дальнейшее доказательство будем основывать на том, что определение делимости позволяет утверждать, что известно, что существует целое число $a1$, которое справедливо в контексте выражения $\alpha = p1 \cdot a1$. Соответственно, в данных условиях, если значение $a1$ будет больше единицы, значит будет существовать следующий его наименьший простой делитель $p2$, из которого можно вывести равенства $a1 = p2 \cdot a2$ и $a = p1 \cdot p2 \cdot a2$. Тем не менее, если число $a2$ будет больше единицы, то возникнет его наименьший простой делитель $p3$, из чего следует, что $a2 = p3 \cdot a3$, а это означает, что $a = p1 \cdot p2 \cdot p3 \cdot a3$. Этот процесс будет продолжаться, до тех пор, пока не будет получен неизбежный результат $an = 1$, так как последовательность $a, a1, a2, \ldots$ представлена убывающими целыми положительными числами. Обобщая указанные ранее действия, можно говорить о возможности получения разложения числа a на простые множители вида $a = p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn$ (при $n = 1$ имеем $\alpha = p1$; указанный вариант разложения справедлив в случаях, когда число a относится к категории простых).

Следующим шагом становится необходимость доказать такое свойство, как «единственность» определенного нами варианта разложения.

Для доказательства этого утверждения предположим, что способ разложения $a = p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn$ не единственный, и существует другой вариант разложения числа a на простые множители $q,\ q\ (1,\ )\ q2, \ldots,\ qm$, соответствующие виду $a = q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qn$. В таком случае, справедливым должно быть равенство $p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn = q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qn$. Рассмотрим другой случай, когда $n \neq m$ и докажем, что это равенство является невозможным, но когда $n = m$ варианты произведений $p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn$ и $q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qn$ тождественно друг другу равны.

В указанном равенстве правая часть делится на $q1$ и благодаря этому, согласно предыдущей теореме, хотя бы один из множителей $p, p\ (1,\ )\ p2, \ldots, pn$ должен быть способен делиться на $q1$. Допустим, на $q1$ делится $p1$, однако, в силу того, что числа $p1$ и $q1$ являются простыми, то $p1$ делится на $q1$ только в том случае, если $p1 = q1$. Данное условие позволяет обе части равенства $p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn = q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qn$ сократить на $p1 = q1$ и получить равенство $p2 \cdot \ldots \cdot pn = q2 \cdot \ldots \cdot qn$. Если рассуждать аналогичным способ в отношении $p2$ и $q2$, впоследствии мы придем к равенству $p3 \cdot \ldots \cdot pn = q3 \cdot \ldots \cdot qn$. Данные действия продолжаем до тех пор, пока в одной из частей равенства не будут сокращены все представленные множители. В условиях, когда n≠m результатами указанных операций станут либо равенство $1 = q(n+1) \cdot \ldots \cdot qm$, либо равенство $p(m+1) \cdot \ldots \cdot pn = 1$, которые невозможны для простых чисел $q(n+1), \ldots, q(m\ )$ и $p(m+1,) \ldots, pn$. В такой ситуации, когда n=m, мы получаем тождество $1 = 1$, которое указывает на тождественное равенство разложений $a = p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pn$ и $a = q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qn$. Результаты, приведенные в доказательстве показывают единственность разложения числа на простые множители.

Пример 1.1. Представить число 985608 в виде канонического разложения на простые множители.

Для решения примера необходимо последовательно делить указанное число на простые числа, при этом начиная операцию с наименьшего простого числа 2. Схематично, этот процесс можно представить факторизацией в виде:

985608	2
492804	2
246402	2
123201	3
41067	3
13689	3
4563	3

1521	3
507	13
169	13
13	1
1	

Как видно из канонического разложения при разложении указанного числа на простые множители, выражение будет иметь вид:

$985608 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 13^2.$

Пример 1.2. Найти пять наименьших натуральных чисел n, для которых число n^2 $-$ 1 будет являться произведением трёх простых различных чисел p1, p2, p3.

Из имеющихся данных известно, что любое натуральное число n может быть либо чётным, либо нечётным, а это означает, что оно может быть записано следующими способами: $n = 2k$ или $n = 2k + 1$, где $k = 0, 1, 2, 3$ ...

1. Если $n = 2k + 1$, то $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. Как видно из условия, $n^2 - 1$ представляет собой произведение 3 простых различных чисел p_1, p_2, p_3, но при указанных n это условие невыполнимо.

2. Если $n = 2k$, то $n^2 - 1 = (2k)^2 - 1 = 4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$.

При $k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4,\ k = 5,\ k = 6$ условие задачи не выполняется.

При $k = 7$ $n^2 - 1 = 195 = 3 \cdot 5 \cdot 13,$ то есть $n_1 = 14$.

При $k = 8$ $n^2 - 1 = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17,$ то есть $n_2 = 16$.

При $k = 9$ условие задачи не выполняется.

При $k = 10$ $n^2 - 1 = 399 = 3 \cdot 5 \cdot 19,$ то есть $n_3 = 20$.

При $k = 11$ $n^2 - 1 = 483 = 3 \cdot 5 \cdot 23,$ то есть $n_4 = 22$.

При $k = 12,\ k = 13,\ k = 14,\ k = 15$ условие задачи не выполняется.

При $k = 16$ $n^2 - 1 = 1023 = 3 \cdot 5 \cdot 31,$ то есть $n_5 = 32$.

1.2. Признаки и свойства делимости

Особенность чисел, позволяющие определить кратность (или некратность) числа делителю называется признаком делимости чисел. В действительности, признак делимости является алгоритмом, который позволяет определить – является ли число кратным предварительно заданному значению или нет. Признаки делимости облегчают процесс нахождения кратных чисел без больших затрат времени, особенно при работе с большими числами. Рассмотрим примеры по признакам делимости для некоторых чисел.

Признак делимости на 2

Одним из основных общепринятых утверждений является тот факт, что если число делится на 2, то именуется четным, а если не делится – нечетным. Признаком делимости на число 2 является последняя цифра заданного числа – если последняя цифра является четной или нулем, то деление на 2 возможно. В любом другом случае – нет.

В качестве наглядного примера можно рассмотреть число 56 824, в случае которого деление на 2 возможно (последняя цифра 4, четная), как и в случае с числом 1250 (последняя цифра нуль); Однако, данная операция не применима к числу 8683 (последняя цифра 3, нечетная, не нуль).

Признак делимости на 4

Число будет делится на 4 только в том случае, если его две последние цифры либо представляют нули, либо в том случае, когда образуют число, которое будет делиться на 4. В любом другом случае – нет.

В качестве примера рассмотрим числа 32 600 (две последние цифры – два нуля), которая будет делиться на 4, и 222 754, которое не имеет признаков делимости на 4. Продолжая примеры, число 608 возможно разделить на 4, так как две последние цифры в сумме образуют число 8, способное делиться на 4.

Признак делимости на 8

Интересно, что признаки делимости на 8 сходны по своим условиям с предшествующим вариантом. Число делится на 8, если три последние цифры являются нулями или же образуют число, которое будет делится на 8. В остальных случаях – не делится.

Приведем пример: 220 114 не делится на 8, потому три последние цифры в образовывают число 114, которое, само по себе, не делится на 8; 256320 делится на 8, ведь его три последние цифры вместе дают число 320, а оно делится на 8,

Данная тенденция проявляется и далее. В связи с этим отметим, что аналогичные признаки проявляются и в отношении признаков деления на 16, 32, 64 и так далее, но они не имеют практического значения [10].

Признаки делимости на 3 и на 9

Признаки делимости на цифру 3 отмечаются только у тех чисел, сумма цифр которых делится на 3; на 9 только те, у которых сумма цифр делится на 9

К примеру, число 17835 мы сможем разделить на 3, но оно не будет делится на 9, ведь сумма его цифр $1 + 7 + 8 + 3 + 5 = 24$.Число 105 499 не делится ни на 3, ни на 9, так как сумма его цифр 1 + 0 + 5 + 4 + 9 + 9 будет равняться 28.Число 52 632 делится на 9, так как сумма его цифр 5 + 2 + 6 + 3 + 2 равна 18.

Признак делимости на 6

Число делится на 6, только в тогда, когда оно будет делится в то же время и на 2, и на 3. Во всех других случаях – не делится.

Допустим, число 5 406 мы сможем разделить на 6, так как оно делится одновременно и на 2, и на 3

Признаки делимости на 5

На 5 делятся только те числа, у которых последняя цифра является 0 либо же 5. Во всех остальных случаях – не делится.

240 делится на 5, ведь последней цифрой является 0; 554 мы не сможем разделить на 5, ведь последняя цифра – это 4.

Признак делимости на 25

На 25 делятся числа, у которых две последние цифры являются нулями или де образуют число, которое будет делится на 25, т.е. есть числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75. Другие не делятся.

7150 мы сможем разделить на 25, ведь оно заканчивается на 50, но 4866 не делится на 25, так как последние две его цифры образуют число 66

Признаки делимости на 10, 100 и 1000.

На 10 можно разделить только те числа, у которых последняя цифра является нуле, на 100 можно разделить только в том случае, если у числа две последние цифры нули, а на 1000 – только те, у которых три последние цифры нули.

К примеру, 8200 делится на 10 и на 100; 542000 делится на 10, 100, 1000

Признак делимости на 11

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места будет равна сумме цифр, занимающих четные места, либо же отличается от нее на число, делящееся на 11

Допустим Число 103785 мы сможем разделить на 11, так как сумма цифр, занимающих их нечетные места, 1+3+8=12 равна сумме цифр, занимающих четные места 0+7+5=12.Число 9163627 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, есть 9 + 6 + 6 + 7 = 28, а сумма цифр, занимающих четные места, есть 1 + 3 +2 =6; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11.Число 461025 не делится на 11, так как числа 4+ 1 + 2 = 7 и 6 +0+ 5=11 не равны друг другу, а их разность 11 -7 = 4 на 11 не делится [10].

Свойства делимости

Рассмотрим простейшие свойства делимости. Для любых целых чисел d, r, c справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. Если $d⋮r$ и c – частное от деления , то c – единственное.

Теорема 4. $d ⋮ d$.

Теорема 5. Если $d ⋮ r$ и $r ⋮ c,$ то $d ⋮$ c.

Теорема 6. Если $d ⋮ r$ и $r ⋮ d,$ то или $d = r,$ или $d = -r$.

Теорема 7. Если $d ⋮ r$ и $|r| > |d|,$ то $d = 0$.

Теорема 8. Если $d ⋮ r$ и $d \neq 0,$ то $|d| \geq |r|$.

Теорема 9. Для того, чтобы $d ⋮ r$ необходимо и достаточно чтобы $|d| ⋮ |r|$.

Теорема 10. Если $d1 ⋮ r, d2 ⋮ r, \ldots, dn ⋮ r,$ то $(d1 \pm d2 \ldots \pm dn) ⋮ r$.

Теорема 11. Если сумма чисел и k – 1 слагаемое этой суммы делится нанекоторое число c, то и k – е слагаемое делится нас.

Деление с остатком

Определение. Разделить целое число m на целое число n с остатком – это значит представить его в виде $m = nq + r$, где q и r целые числа,$0 \leq r < |b|$.

Центральную роль во всей арифметике целых чисел играет теорема о делении с остатком.

Теорема 12. Для любых целых m и n имеется единственная пара чисел q и r, удовлетворяющих условиям, $m = mq + r, 0 \leq r < |b|$.

Замечание. В частности, если $r = 0$, то $m = mq$ и m делится на n.

Замечание. Если $m = nq + r, 0 \leq r \leq |b|$, то q именуется неполным частным, а r - остатком от деления m на n.

Из теоремы о делении остатком мы приходим к тому, что при фиксированном целом m 0 любое целое число можно представить в одном из следующих видов:

$$a = m \cdot q$$
$$a = m \cdot q_1 + 1$$
$$a = m \cdot q_2 + 2$$

При этом, если $a < m$, то будем иметь:

$$a = m \cdot qm - 1 + (m - 1)$$

$a = m \cdot 0 + a,$ если a 0 и $a = m \cdot (-1) + (m + a),$ если $a < 0$.

Количество и сумма делителей натурального числа

Теорема 14. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n. Тогда число $\tau(n)$ натуральных делителей числа n, включая 1 и само число n, выражается формулой $\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_s + 1)$.

Доказательство. Любой делитель натурального числа n можно изобразить в виде $d = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_s^{m_s}$, где m_i —целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leq m_1 \leq k_1, ..., 0 \leq m_s \leq k_s$.

Так как по каждому делителю d можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(m_1, m_2, ..., m_s)$ и наоборот, то количество различных наборов равно количеству различных делителей. Первая позиция в этом наборе может быть заполнена $k_1 + 1$ способами, вторая $k_2 + 1$ способами, …, последняя $k_s + 1$ способом. Первые две позиции можно заполнить $\mathrm{k}_1 + 1$. Далее использую метод математической индукции легко получить, что имеется $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$ различных таких строк, то есть $\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$.

Теорема доказана.

Теорема 15. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n. Тогда число $\sigma(n)$, равное сумме всех натуральных делителей числа n, изображено формулой $\sigma(n) = \big(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots +$ *p1k1·…·(1+ps+ps2+…+psks).*

Рассмотрим доказательство. Раскроем скобки в произведении $\big(1 + p_1 +$ *p12+…+p1k1·…·(1+ps+ps2+…+psks),* в результате получаем сумму всех членов вида $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}, 0 \le m_1 \le k_1, \ldots, 0 \le m_s \le k_s$.

Каждое произведение $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$, очевидно, может входить в сумм только единожды n. В результате чего делаем вывод о том, что полученная сумма равнв сумме $\sigma(n)$ всевозможных делителей числа n. Перепишем эту сумму в виде $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}}{p_1-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{k_s+1}}{p_s-1}$.

Теорема доказана.

ГЛАВА 2. Решение задач школьного курсаинформатики с использованием теории чисел

2.1. Исходный уровень знаний и умений, необходимый для решения задач

Теорию чисел по праву можно считать одной из самых увлекательных областей математики. Современный уровень развития математических знаний не изменил отношение к доказательству существования бесконечного числа простых чисел в последовательности чисел Евклида, и это доказательство остается по прежнему понятным. Многие простые вопросы, которые на самом деле просты только на первый взгляд, оказываются значительно глубже, например, вопрос «можно ли найти решения уравнения $a^n + b^n = c^n$ для целых чисел a, b, c и n>2?». Детальное и более глубокое изучение этого вопроса показывает, , что рассматриваемое уравнение положено в основу формулировки известной «крестьянской» теории.

Современное развитие информационных технологий позволяет изучать теорию чисел уже с применением компьютеров. Эта интеграция неслучайна, так как для некоторых вычислений в рамках теории больших чисел, требуется впечатляющая результативность. В связи с этим запросом со временем было создано множество алгоритмов, целью которых является помощь в этих вычислениях.

Свойства делимости очень часто используются при решении задач, не только на уроках математики, но и на уроках информатики. Для того, чтобы благополучно изучить эти темы, учащийся должен обладать определёнными знаниями и навыками, такими как:

- знать определения делимости чисел;
- знать признаки делимости на 5, на 10 и на 2;
- знать признаки делимости на 3 и на 9;
- знать понятие делителя, делимого и кратного;
- знать определение простого и составного числа;
- знать алгоритм разложения на простые множители;
- знать определение НОД и НОК;
- знать определение понятия взаимно простые числа;
- уметь находить НОД и НОК;
- уметь отличать простое число от составного;
- уметь находить остаток и частное при делении многочленов;
- уметь проводить преобразования буквенных выражений;
- уметь распознавать признаки делимости;
- уметь применять основные факты математического анализа для решения задач, применения признаков делимости и их комбинация;
- уметь использовать свойства сравнения для решения задач.

Решение задач считается одним из основных универсальных учебных действий в школьном курсе математики, но сложность в понимании присутствует как и у учащихся начальной школы, так и учащихся средних классов. Во многом, трудности определены многоэтапностью процесса решения задач.

Власова Е.В. считает, что необходимо выделить и установить общие приемы решения задач. В своей практике на выделяет такие этапы, как «необходимость знания этапов процесса, способов решения, типов задач, оснований выбора способа решения, а также владение предметными знаниями: понятиями, определениями терминов, правилами, формулами, логическими приемами и операциями».

2.2. Методические приемы решения задач по информатике сиспользованием положений теории чисел

Формирование понятия «числа» и изучение их свойств происходит не только на уроках математики, но и на уроках информатики и ИКТ. Это не случайно, так как программирование на разных языках предполагает наличие умения характеризовать применяемые в программе числовые данные. При этом, сохраняется необходимость четко формулировать ответы на вопросы по типу «являются ли используемые числа константными или переменными?» и определять тип этих данных.

Выбор типа данных, как правило, влияет на набор возможных операций над числами. К примеру, операции для нахождения остатка и неполного частного являются определенными только для целочисленных типов. Однако, задачи, связанные с системами счисления (перевод чисел в другую систему счисления, арифметические операции, сравнение и т.д.), подробнее разбираются на уроках информатики, нежели на уроках математики.

Существует обширный класс теоретико-числовых задач, допускающих не только строго доказательное математическое решение, но и решение методами, свойственными информатике, путем проведения вычислений на компьютере. Примечательно, что эти два подхода гармонично дополняют друг друга: узнав верный ответ при проведении вычислительного эксперимента становится возможным подсказать ход теоретического решения, а математическое решение дает объяснение на вопрос «почему только данные ответы удовлетворяют условию задачи?».

Тем не менее, необходимо учитывать факт наличия некоторых существенных ограничений у вычислительного эксперимента, таких как возможность проведения перебора только конечного числа вариантов. В частности, вычислительный эксперимент можно эффективно применять при необходимости перебора натуральных чисел в тех случаях когда известно количество цифр (двух-, трехзначные числа и т. д.). Но данный метод невозможно использовать в случаях, когда необходимо провести перебор всех элементов бесконечного подмножества во множестве натуральных чисел (всех натуральных чисел, всех четных чисел, всех простых чисел и т. д.).

Рассмотрим примеры использования положений теории чисел в программировании, а также в программе государственной итоговой аттестации по информатике.

Пример 2.1. Нахождение количества делителей и самих делители числа a.

Для решения этого примера применим перебор всех чисел i, подходящих по условиям на роль делителя.

Согласно имеющимся данным известно, что 1 <= i <= a.. Для ускорения работы алгоритма обратим внимание, что если i является делителем a, то $\frac{a}{i}$ тоже является делителем a, при этом одно из чисел i и $\frac{a}{i}$ не превышает Sqrt(a) (в случае, если предположить обратное утверждение, то равенство будет иметь вид $a = i * (a/i) > Sqrt(a) * Sqrt(a) = a$ что является противоречием). Исходя из отмеченного, достаточно перебирать числа i в пределах от 1 до Trunc (Sqrt(a)) и в случае нахождения, что некоторое i выступает делителем, выдавать, что $\frac{a}{i}$ тоже делитель, при этом увеличивая их численность на 2.

Указанный алгоритм не будет работать в тех случаях, когда a представлена точным квадратом, однако это условие легко исправляется. Перечисленные операции приведены в следующем алгоритме:

```
c:= 0;
For i:= 1 to Trunc(Sqrt(a)) doIf a mod i = 0 then
                begin
                  If i*i = a then
                        begin
                          c:= c+1;
                          WriteLn(`Найден делитель ', i);
                endelse
                 begin

                     c:= c+2;
                     if i=a div i then c:=c-1;
                 end; WriteLn(`Найден делитель `, i);
                     WriteLn(`Найден делитель `, a div i);

        end;
```

Чтобы проверить является ли полученное программой число простым достаточно посчитать количество его делителей, используя алгоритм 2.

Пример 2.2. Нахождение всех простых чисел, не превосходящих заданное число N.

Для реализации примера 2 используем нескольких возможных способов (подходов):

1) Метод Эратосфена, который предполагает использовать описанную далее последовательность действий. Выпишем все числа 2 до N. Далее для реализации последовательности действий «обведем минимальное из оставшихся чисел», «далее вычеркнем все кратные ему числа». Будем повторять, пока найдутся не зачеркнутые или не обведенные числа. Завершение алгоритма происходит в том случае, когда все простые числа будут обведенными.

Доказательство. Используя описанный алгоритм становится понятно, что будут вычёркиваться только те числа, которые заведомо будут делить. Следовательно, простые числа не вычеркиваются и последовательности. Поэтому, согласно индукции становится понятно, что для любого N алгоритм обводит все простые числа, которые не будут превосходить N. То есть, для данного алгоритма справедлива база, когда при $N = 2$ утверждение верно в силу того, что число 2 будет обведено на первом шаге. Индуктивный переход для алгоритма будет выглядеть как «пусть утверждение верно при $2 <= N <= k-1$». Рассмотрим $N = k$. Рассмотрим случай, если число N представляет собой составное число, тогда очевидно, что имеется хотя бы один простой делитель t, например, его минимальный делитель. Продолжим использовать индуктивный метод, на определенном шаге число t будет обведено, а это значит, что на этом же самом шаге будет вычеркнуто число N. В том случае, когда N будет представлено простым числом, оно не может быть вычеркнуто при реализации алгоритма и на определенном шаге станет окажется минимальным числом из оставшихся и, следовательно, будет обведено. Можно сделать заключение о том, сто сформулированное утверждение доказвно.

Сохраним в массиве для дальнейшего использования уже найденные простые числа для того, чтобы при рассмотрении очередного числа X, была бы возможность разделить его на уже имеющиеся простые числа, которые при этом не превосходят значение, определяемое функцией Trunc (Sqrt(X)).

Доказательство. Работа алгоритма корректна, так как, если число окажется составным, то обязательно найдется простой делитель, не превосходящий квадратный корень из этого числа.

Во многих заданиях при подготовке к ЕГЭ и ОГЭ требуются знания признаков делимости, понятий «остаток от деления», «целочисленное деление».

Рассмотрим задания из перечня ЕГЭ, при решении которых необходимо использование теории чисел.

Пример 2.3. Рассмотрим алгоритм, который для удобства приведен на пяти языках. На вход поступает число x, в результате чего алгоритм печатает два числа: L и M. Определить наименьшее из таких чисел x, при вводе которых алгоритм печатает сначала 8, а потом 13.

<table>
<tr><th>Паскаль</th><th>Алгоритмический язык</th></tr>
<tr><td><pre>
var x, M, L: integer;
begin
    readln(x);
    M := 0; L := 0;
    while x > 0 do
    begin
        M := M + x mod 10;
        if x mod 10 > L then
            L := x mod 10;
        x := x div 10
    end;
    writeln(L); write(M)
end.
</pre></td><td><pre>
алг
нач
    цел x, M, L
    ввод x
    M := 0
    L := 0
    нц пока x > 0
        M := M + mod(x, 10)
        если mod(x, 10) > L то
            L := mod(x, 10)
        все
    x := div(x, 10)
    кц
    вывод L, нс, M
кон
</pre></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Бейсик</th><th>Python</th></tr>
<tr><td><pre>
DIM X, M, L AS INTEGER
INPUT X
M = 0
L = 0
WHILE X > 0
    M = M + X MOD 10
    IF X MOD 10 > L THEN
        L = X MOD 10
    END IF
    X = X \ 10
WEND
PRINT L
PRINT M
</pre></td><td><pre>
x = int(input())
M = 0; L = 0
while x > 0:
    M = M + x % 10
    if x % 10 > L:
        L = x % 10
    x = x // 10
print(L)
print(M)
</pre></td></tr>
</table>

Си++

```
#include
using namespace std;
int main() {
    int x, M, L;
    cin >> x;
    M = 0;
    L = 0;
    while (x > 0) {
        M = M + x % 10;
        if(x % 10 > L)
            L = x % 10;
        x = x / 10;
    }
    count << L << endl << M;
    return 0;
}
```

Рисунок 1. Алгоритм примера 2.3.

Рассмотрим методику разбора идеи решения задачи. Данная программа была приведена в качестве 22 задания из **ЕГЭ по информатике 2021**. Если попробовать последовательно разобраться и понять основную идею данной задачи, то окажется, что вначале с клавиатуры в программу было введено некое число. Оно было заложено в переменную **x**. Далее начинается ЦИКЛ while. До тех пор, пока **x** > 0, будет выполняться тело ЦИКЛА.

К переменной **M** внутри данного ЦИКЛА с каждой новой итерацией, согласно программе, будет прибавляться последняя цифра введённого числа **x**.

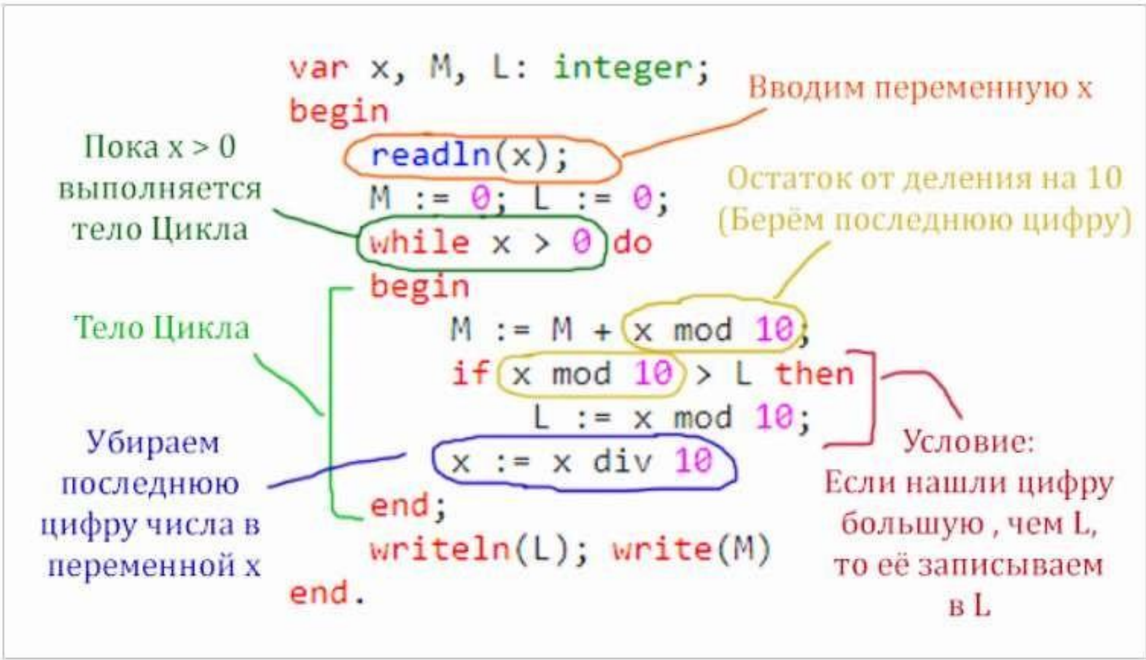

Рисунок 2. Разбор решения примера 2.3

Примечание:

Если посмотреть на рисунок, то можно заметить, что конструкция $\boldsymbol{x}\ mod\ 10$ обозначает последнюю цифру.

Пример:

***x** := 17 ;*

***y** := 17 mod 10 ;*

В переменной ***y*** будет иметь значение 7. Если $17 : 10 = 1$ (ост. 7)

mod – это остаток от деления.

Затем, необходимо обратить внимание на условие. В том случае, когда последняя цифра **x** больше, чем предыдущее значение переменной **L**, эта цифра становится новым значением переменной **L**.

Далее следует завершающая команда внутри тела ЦИКЛА, которая выглядит как $x := x\ div\ 10$ и имеет целью отбросить последнюю цифру переменной **x**.

Примечание:

Согласно условию, конструкция $\boldsymbol{x}\ div\ 10$ удаляет последнюю цифру.

Пример:

x := 17 ;

y := 17 div 10 ;

В таком случае, в переменной **y** будет иметь значение 1. Если 17 : 10 = 1,7 - но дробную часть отбрасываем.

div – это целочисленное деление.

Приведенный вариант конструкций весьма часто встречается в заданиях единого государственного экзамена по информатике 2021 года, как правило, в 22 задании.

Дальнейшие действия заключаются в прибавлении последней цифры к переменной **M**, а затем её отбрасывании. Эти действия в ЦИКЛе будут повторяться до тех пор, пока **x** > 0 (пока у числа будут цифры).

Так, в конечном счете, в переменной **L** окажется самое большое число переменной **x.**

Если посмотреть на условия задачи **L** = 8, а **M** = 13. Это означает, что самая большая цифра переменной **x** должна быть 8, а сумма всех цифр числа **x** должна равняться 13., из чего следует, что наименьшее число **x** = 58.

Ответ: 58

Пример 2.4. Рассмотрим алгоритм, который для удобства приведен на пяти языках. Получив на вход число x, этот алгоритм выводит в качестве результата два числа: a и b. Укажите наименьшее из таких чисел x, при вводе, которого результатом работы алгоритма являются числа 3, а потом 2

<table>
<tr><th>Бейсик</th><th>Python</th></tr>
<tr><td>

```
DIM X, A, B AS INTEGER
 INPUT X
 A=0: B=0
 WHILE X > 0
    A = A+1
    IF B < (X MOD 8) THEN
        B = X MOD 8
    END IF
    X = X \ 8
 WEND
 PRINT A
 PRINT B
```

</td><td>

```
x = int(input())
a = 0
b = 0
while x > 0:
    a += 1
    if b < (x % 8):
        b =x % 8
    x //=  8
print(a)
print(b)
```

</td></tr>
</table>

Паскаль

```pascal
var x, a, b: integer;
    begin
    readln(x);
    a:=0; b:=0;
    while x>0 do
    begin
        a:=a + 1;
        if b < (x mod 8)
        then
            b:=x mod 8;
        x:=x div 8;
    end;
    writeln(a); write(b);
end.
```

Си++

```cpp
#include
using namespace std;
int main()
{
    int x, a, b;
    cin >> x;
    a=0; b=0;
    while (x>0){
        a = a+1;
        if (b < (x%8){
            b = x%8;
        }
        x = x/8;
    }
    cout << a << endl << b << endl;
}
```

Рисунок 3. Алгоритм примера 2.4.

Решение:

Обратив внимание на условие задачи становится ясно, что внутри ЦИКЛа while с каждой итерацией к переменной **a** прибавляется 1. При этом, согласно другому условию, наибольший остаток в переменной **b** будет от деления числа **x** на 8. Тем не менее, число **x** уменьшается целочислено с каждой итерацией в 8 раз. Получается, что следующая команда идёт $x := x\ div\ 8$.

Таким образом, в результате ряда операций выходит, что в выражении **x mod 8** поочередно будут находиться все цифры числа **x** в восьмеричной системе! В то же время, самая большая цифра числа **x** в восьмеричной системе окажется в переменной **b**.

Обобщив вышеуказанное получится, что есть необходимость в составлении переменной **x** сначала в восьмеричной системе, чтобы в качестве самой большой цифры получить 2, при этом количество цифр будет соответствовать 3 (переменная **a**).

Таким числом будет $\boldsymbol{x} = 1028$.

Если перевести получившееся число в десятичную систему и записать ответ, то получится 102_8 -> 66_{10}.

Ответ: 66

Рассмотрим аналогичный пример.

Пример 2.5. Рассмотрим алгоритм, который для удобства приведен на пяти языках. На вход алгоритма поступает число x. В результате исполнения алгоритма печатается два числа a и b. Укажите наибольшее из возможных введенных чисел x, при вводе, которого алгоритм печатает сначала 2, а потом 5.

Бейсик

```
DIM X, A, B AS INTEGER
 INPUT X
 A = 0: B = 1
 WHILE X > 0
     A = A+1
     B = B * (X MOD 100)
     X = X\100
 WEND
 PRINT A
 PRINT B
```

Python

```
x = int(input())
a, b = 0, 1
while x > 0:
    a = a + 1
    b = b * x%100
    x = x//100
print(a)
print(b)
```

Паскаль

```
var x, a, b: integer;
begin
    readln(x);
    a := 0; b := 1;
    while x > 0 do
        begin
            a := a+1;
            b := b*(x mod 100);
            x := x div 100;
        end;
    writeln(a); write(b);
end.
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
цел x, a, b
ввод x
a:=0; b:=1
нц пока x > 0
    a := a+1
    b := b*mod(x,100)
    x := div(x,100)
кц
вывод a, нс, b
кон
```

Рисунок 4. Алгоритм примера 2.5.

Решение: Текущая задача похожа на предшествующие. Но в данной задаче у нас выражение **x mod 100** будет получать цифры 100-ричной системы числа **x** с каждой новойитерацией.

В переменной же **b** содержится произведение всех цифр записи числа **x** в 100-ричной системе после окончания работы ЦИКЛА.

Внимательно прочитав условия задачи, следует обратить внимание учащихся на тот факт, что в соответствии с предложенным алгоритмом произведение цифр числа **x** в 100-ричной системе равно 5, и одновременно с этим ведется подсчет количества цифр, которое равно 2 (переменная **a**). От нас требуется указать **наибольшее число** x, выдаваемое программой. Проведя вычисления становится понятно, что наиболее подходящим является число 51_{100}.

Программное решение после разбора нескольких аналогичных примеров не вызывает у большинства учащихся значительных затруднений. Тем не менее каждая задача имеет свои особенности, которые необходимо учитывать при формировании программного кода, именно эти особенности и вызывают затруднения у учащихся.

Зачастую невнимательное прочтение требований задачи приводит к тому, что при правильно написанном коде или в случае непрограммного решения задачи метолом математического моделирования учащиеся учащиеся в результате записывают неверный ответ.

Так, например, и в этой задаче для записи верного ответа требуется не забыть выполнить дополнительное действие. Если перевести получившееся число в десятичную систему, получим:

$$1 * 100^0 + 5 * 100^1 = \mathbf{501}$$

Ответ: 501

Пример 2.6. Рассмотрим алгоритм, который для удобства приведен на пяти языках и вводит натуральное число x, выполняет преобразования, азатем выводит в качестве результата одно число. Найдите наименьшее значение x, при вводе которого программа выведет число 18.

Бейсик

```
DIM X, A, B, D AS INTEGER
INPUT X
A = 0: B = 10
WHILE X > 0
  D = X MOD 9
  IF D > A THEN A = D
  IF D < B THEN B = D
  X = X \ 9
WEND
PRINT A*B
```

Паскаль

```
var x, a, b, d: longint;
begin
  readln(x);
  a := 0; b := 10;
  while x > 0 do begin
    d := x mod 9
    if d > a then a := d;
    if d < b then b := d;
    x := x div 9
  end;
  writeln(a*b)
end.
```

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int x, a, b, d;
  cin >> x;
  a = 0; b = 10;
  while (x > 0) {
    d = x % 9;
    if (d > a) a = d;
    if (d < b) b = d;
    x = x / 9;
  }
  cout << a*b << endl;
  return 0;
}
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел x, a, b, d
  ввод x
  a := 0; b := 10
  нц пока x > 0
    d := mod(x,9)
    если d > a то a := d все
    если d < b то b := d все
    x := div(x,9)
  кц
  вывод a*b
кон
```

Рисунок 5. Алгоритм примера 5.6.

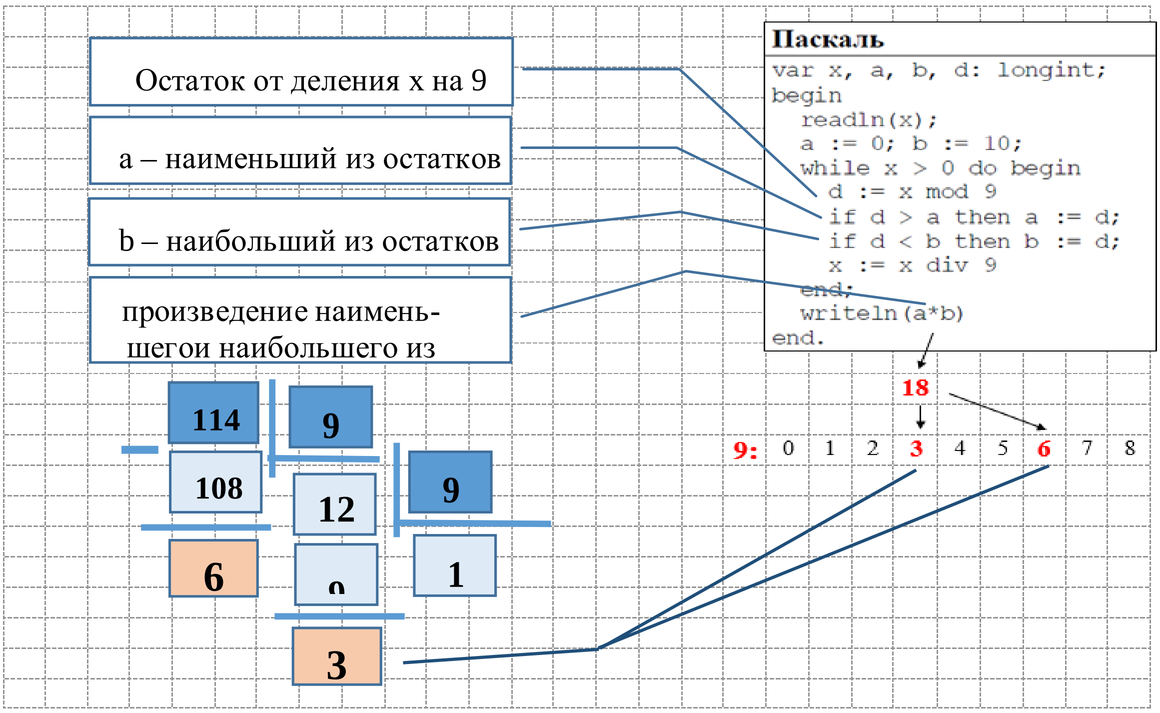

Рисунок 6. Разбор решения примера 6.

Ответ: 114

Пример 2.7. Укажите наибольшее число x, при вводе которого алгоритм напечатает сначала 3, потом – 7.

Бейсик

```
DIM X, L, M AS INTEGER
INPUT X
L = 0
M = 0
WHILE X > 0
    M = M + 1
    IF X MOD 2 <> 0 THEN
        L = L + 1
    END IF
    X = X \ 2
WEND
PRINT L
PRINT M
```

Python

```
x = int(input())
M = 0
L = 0
while x > 0
    M = M + 1
    if x % 2 > 0:
        L = L + 1
    x = x // 2
print(L)
print(M)
```

Паскаль

```
var x, L, M : longint;
begin
    readln(x);
    M := 0;
    L := 0;
    while x > 0 do begin
        M := M + 1;
        if x mod 2 > 0 then
            L := L + 1;
        x := x div 2;
    end;
    writeln(L);
    writeln(M);
end.
```

C++

```
#include
using namespace std;
int main() {
    int x, L, M ;
    cin >> x;
    M = 0;
    L = 0;
    while (x > 0) {
        M = M + 1;
        if(x % 2 > 0) {
            L = L + 1;
        }
        x = x / 2;
    }
    cout << L << endl << M;
return 0;
}
```

Рисунок 7. Алгоритм примера 2.7

Решение:

Указанное в условии выражение **x mod 2** может давать только два значения: либо 0, либо 1. Значит, в том случае, когда остаток от деления **x** на 2 больше чем ноль, в **x mod 2** будет единица. Соответственно, в переменной **L** будет подсчитываться количество единиц.

В свою очередь, переменная **M** подсчитывает количество всех итераций.

Если попробовать провести аналогию учитывая тот факт, что имеется число **x** в двоичной системе, то переменная **L** покажет количество находящихся в нём единиц, а переменная **M** – количество всех разрядов в данном двоичном числе.

В условиях задачи дано задание указать наибольшее значение x, при котором $\boldsymbol{L} = 3$, а $\boldsymbol{M} = 7$.

Получается, что такое число **x** будет соответствовать $\mathbf{1110000}_\mathbf{2}$, что при переводе десятичную систему будет тождественно $\mathbf{112}$.

Ответ: 112

Последние годи при сдаче ЕГЭ по информатике у учащихся есть возможность использования компьютера.

Это позволило вывести подготовку учащихся на другой уровень программирования. Если в более ранние годы, рассматриваемые нами задачи решались только методом математического моделирования, то теперь учитель итожит рассмотреть ограниченный ряд типовых задач, программная реализация которых не относится к высокому уровню сложности, и затем учащиеся могут использовать эти приемы для ращения новых задач. Помимо этого, этот факт повышает уровень подготовки выпускника по разделу «Алгоритмизация и программирование»

Пример 2.8. Найдите все натуральные числа, N, принадлежащие отрезку $[200\,000\,000;\ 400\,000\,000]$, которые можно представить в виде $N = 2m\ 3n$, где m – чётное число, n – нечётное число. В ответе запишите все найденные числа в порядке возрастания.

Далее приведено решение задачи на языке Паскаль:

```
label 1;
var m,n : integer;h: int64;
begin
for c:int64:=200000000 to 400000000 dobegin
        h:=c;
        if (h mod 2<>0) and   (h mod 3<>0)   then goto 1;

        n:=0;
        while h mod 3= 0 dobegin
                        h:=h div 3;
                        n:=n+1;
                  end;
        if n mod 2=0   then goto 1;

        m:=0;
        while h mod 2 = 0 dobegin
                        h:=h div 2;
                        m:=m+1;
                    end;
        if (h=1) and (n mod 2<>0) and (m mod 2=0)   then
writeln(c);
    1:
    end;
end.
```

Ответ: 201326592
229582512
254803968
322486272

Пример 2.9. Ниже на четырёх языках программирования записана программа, вводящая натуральное число x и выполняющая преобразования, в результате которых выводит результат. Укажите наименьшее значение x, при вводе которогопрограмма генерирует число 20.

Python

```
x = int(input())
a = 3*x + 23
b = 3*x - 17
while a != b:
    if a > b:
        a -= b
    else:
        b -= a
print(a)
```

Паскаль

```
var x, a, b: integer;
begin
  readln(x);
  a := 3*x + 23;
  b := 3*x - 17;
  while a <> b do begin
    if a > b then
      a := a - b
    else
      b := b - a
  end;
  writeln(a)
end.
```

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int x, a, b;
  cin >> x;
  a = 3*x + 23;
  b = 3*x - 17;
  while (a != b) {
    if (a > b)
      a -= b;
    else
      b -= a;
  }
  cout << a << endl;
  return 0;
}
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел x, a, b
  ввод x
  a := 3*x + 23
  b := 3*x - 17
  нц пока a <> b
    если a > b
      то    a := a - b
      иначе b := b - a
    все
  кц
  вывод a, нс
кон
```

Рисунок 8. Алгоритм примера 2.9.

Решение:

Рассмотрим программу на языке Паскаль:

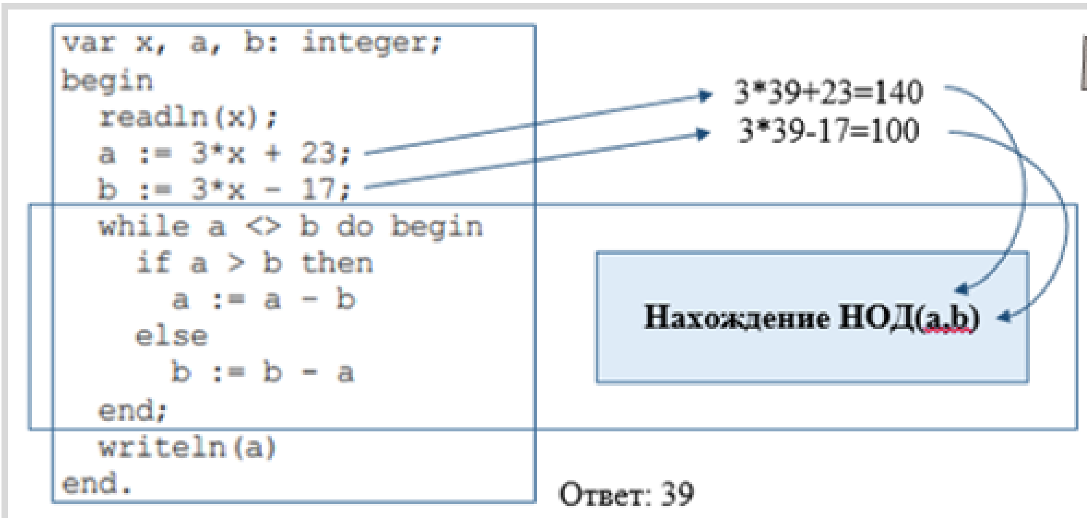

Рисунок 9. Разбор решения примера 2.9.

Рассмотренные примеры являются демонстрацией того факта, что знание основных положений теории чисел значительно упрощает решениезадач либо делает решение более эффективным по времени исполнения программы в случае решения задачи программным путем.

Пример 2. 10. Дан отрезок $[200\,000\,000;\ 400\,000\,000]$, Найдите все натуральные числа, N, принадлежащие этому отрезку, представимые в виде $N = 2m\ 3n$, где m – чётное число, n – нечётное число. В ответе укажите все найденные числа в порядке возрастания

Решение:

```
label 1;
var m,n : integer;h: int64;
begin
for c:int64:=200000000to 400000000dobegin
        h:=c;
        if (h mod 2<>0) and   (h mod 3<>0)   then goto 1;

        n:=0;
        while h mod 3= 0 dobegin
                        h:=h div 3;
                        n:=n+1;
                  end;
        if n mod 2=0   then goto 1;

        m:=0;
        while h mod 2 = 0 dobegin
                        h:=h div 2;
                        m:=m+1;
                   end;

        if (h=1) and (n mod 2<>0) and (m mod 2=0)   then
writeln(c);
    1:
    end;
end.
```

Для эффективного перебора такого большого диапазона чисел учащимся необходимо придумать алгоритм непрямого перебора чисел, исключая рассмотрения неподходящие числа.

Рассмотрим примеры решения задач путем организации более эффективного алгоритма на основе некоторых положений теории чисел.

Пример 2.11. Найдите все натуральные числа, принадлежащие отрезку [77 777 777; 88 888 888], у которых ровно пять различных нечётных делителей (количество чётных делителей может быть любым). В ответе перечислите найденные числа, справа от каждого числа запишите его наименьший нечётный делитель, не равный 1.

Рассмотрим, пример программы, не учитывающей возможный большой интервал времени исполнения данного алгоритма. Это стандартное решение, которое не вызывает затруднений у учащихся, так как включает прямой перебор без учета величины числового диапазона.

```
var n : longint;
   min, kd, d: integer;
begin
for n:= 77777777 to 88888888 do
  begin
     kd:=1; min:=n;
     for d:=n downto 2 do
        if (n mod d=0) and (d mod 2<>0)
                     then
                          begin
                              kd:=kd+1;
                              min:=d;
                          end;
     if kd=5 then writeln(n,'     ',min);
  end;
end.
```

В ходе исполнения программы, учащиеся понимают, что без использования специальных методов, задача эффективно по времени не решится.

Поэтому рассмотрим другой алгоритм, выдающий результат работы программы за более короткий период времени.

Используем следующее положение: если число имеет ровно 5 нечётных делителей, в его разложение на простые множители может входить только 1 нечётное простое число. Тогда этими делителями будут 1, p, p^2, p^3, p^4, а само число имеет вид $n = 2^k p^4$, где k – натуральное число или ноль, p – нечётное простое число.

В результате получаем следующий алгоритм:

```
var n1, d, kd : longint;
begin
for var n:= 77777777 to 88888888 do
  begin
      n1:=n;
      while n1 mod 2=0 do
            n1:= n1 div 2;
      d:= round(sqrt(sqrt(n1)));
      kd:=2;
      for var d1:=2 to d div 2 do
             if d mod d1 =0 then kd:=kd+1;
      if (kd=2) and
         (n1 mod d=0) and
         (d mod 2<>0) and
         (d*d*d*d=n1)  then
                                   writeln(n,'     ',d);
  end;
end.
```

Результат:

77900162 79
78074896 47
78675968 7
80604484 67
81920000 5
84934656 3
85525504 17
88529281 97

Как видно из примеров, в информатике в целом, и при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ в частности, учащимся необходимо применять элементы теории чисел для рационального или менее затратного по времени и ресурсам решения поставленных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Умение решать задачи на делимость в первую очередь и напрямую связано с умением моделировать реальные ситуации на алгебраическом языке, умением изучать модели, построенные с помощью алгебраического аппарата. В связи с этим рассмотрены примеры задач по теме делимости, для решения которых требуются не только теоретические знания, но и практические умения, связанные с построением математических моделей.

В ходе исследования, проведенного в соответствии с их целями и задачами, сформулируем следующие выводы и результаты: теоретические и практические знания по рассматриваемой теме были обобщены и систематизированы; была выбрана система задач информатики, решаемых с помощью теории чисел; выбранные проблемы были решены, а решения и методологические подходы к решению представлены в работе.

Список использованных источников

1. Басова, Л.Л. Информатика и ИКТ: учебник для 9 класса / Л.Л. Басова. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.

2. Боревич З.И. Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. - М.: Наука. Главная редакция литературы. — 1985. — 504 с. - 3-е изд.доп.

3. Банникова, Т.М., Основы теории чисел: учебно-методическое пособие / Т.М. Банникова, Н.А. Баранова. -Ижевск, 2009. 95 с.

4. Велетень, О.С. Формирование универсальных учебных действий обучающихся 6 класса в процессе изучения темы «Признаки делимости» / О.С. Велетень // Педагогическое образование в России - 2013. - № 5. – С. 16 – 19.

5. Глухова, О.Ю. Делимость чисел в элективных курсах / О.Ю.Глухова // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук - 2015. –№ 7-2. – С. 58 – 61.

6. Гейн, А.Г. Информатика. 7–9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Гейн, А.И. Сенокосов, В.Ф. Шолохович. –Москва: Дрофа, 2005.

7. Кушниренко, А. Г. Информатика. 7–9 класс / А. Г. Кушниренко, Г. В. Лебедева, Я. Н. Зайдельман. –Москва: Дрофа, 2013.

8. Лапчик, М. П. Методика преподавания информатики / М.П.Лапчик. – Москва: Академия, 2016.

9. Муравин, Г.К. Программа курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2007. – 158 с.

10. Макарова, Н.В. Информатика и ИКТ: учебник для 8 – 9 класса /Н.В. Макарова. – Питер, 2014.

11. Семакин, И. Г. Информатика. 9 класс / И. Г. Семакин, Е. К. Хеннер. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2015.

12. Семакин, И. Г. Информатика. Задачник–практикум. 7 класс / И. Г.Семакин, Е. К. Хеннер. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2014.

13. Семакин, И.Г. Информатика: учебник для 11 класса / И.Г. Семакин, Е.К. Хеннер, Т.Ю. Шеина. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

14. Угринович, Н.Д. Информатика и ИКТ. 10–11 класс / Н.Д. Угринович.– Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

15. Угринович, Н.Д. Информатика: учебник для 11 класса / Н.Д. Угринович. –Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2013.

16. Феоктистов, И.Е. Делимость чисел / И.Е. Феоктистов // Математика в школе - 2009. - № 8. – С. 47 – 58.